프로포즈와 튕기기에 관한 수리적 고찰

퍼온 글: 나우누리 유머란

2001년 12월 8일

– WARNING BEFORE READING –
<글에 나온 수식이 맞는지는 정확히 장담 못함.>

여성은 언제까지 남자의 프로포즈를 튕길 수 있을지... 확률에 관한 짧은 지식으로 여성의 튕김의 끝은 어디인지 밝혀본다.

상황 설정은 이러하다.

한 여성에게 100명의 남자가 순차적으로 프로포즈 한다고 하자. 100명 중 백마탄 왕자는 한명 뿐이고, 여성은 그 남자를 찾고 싶어한다.

물론 그가 첫번째로 프로포즈할지 100번째로 프로포즈를 해 올지는 알 수 없을 것이다. 여자가 100명의 남자 중 제일 멋진 남자를 고른다는 건 너무 불공평하니까 한번 프로포즈한 남자를 튕기면 다시는 그 남자는 선택할 수 없다고 하자.

즉 만약 더 나은 남자가 있을 거라는 기대감에 99명의 남자를 차례로 튕겨버렸다면 100번째 프로포즈하는 남자와 결혼하는 수 밖에 없다. 물론 첫번째 남자의 프로포즈를 받아드리면 99명의 남자가 어떤 남자인지 보지도 못 한다. 그러면 여자에게는 전략이 필요하다.

<몇명까지는 일단 튕겨보고 그 다음부터 만나는 남자 중 제일 멋진 남자와! 결혼하자. >

여자에게 몇명까지 튕겨보는게 가장 합리적인 전략이 될까?

조건부 확률을 생각해 볼 수 있다.

- A_n : 백마탄 왕자가 n번째로 프로포즈해올 사건.
- B : 여자가 백마탄 왕자를 정확하게 선택할 사건.

그러면 여자가 백마탄 왕자를 정확하게 선택할 확률은 다음과 같이 표현된다.

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_{100})P(B|A_{100}) \qquad (1)$$

이제 우리의 여성이 r명까지는 일단 튕겨보고 그 다음부터 만나는 남자 중 제일 멋진 남자와 결혼하기로 했다고 하자.

그러면 $P(B|A_1) = 0, P(B|A_2) = 0, \cdots, P(B|A_r) = 0$이다.
(최초 r명 안에 백마탄 왕자가 있었다면, r명까지는 튕기기로 한 여자의 작전은 완전 $\cdots$ 실패당.)

$$P(B|A_{r+1}) = 1 \tag{2}$$

(당연히 $r+1$번째로 백마탄 왕자가 프로포즈 해 왔다면 r명까지 튕긴 여자는 이전에 본 r명보다 더 멋진 남자를 바로 만나버린거니까 백마탄 왕자 픽업할 확률은 100%)

$$\begin{aligned} P(B|A_{r+2}) = \frac{r}{r+1}, P(B|A_{r+3}) = \frac{r}{r+2}, \cdots, \\ P(B|A_{99}) = \frac{r}{99}, P(B|A_{100}) = \frac{r}{100} \end{aligned} \tag{3}$$

$r+2$번째에 백마탄 왕자가 있는데 $r+1$번째 프로포즈 한 남자가 이전에 튕긴 r명보다 나은 남자였다면, 여자는 최초세운 전략상 그냥 $r+1$번째 남자의 프로포즈를 받아들이게 되고 그러면 $r+2$번째 남자는 보지도 못하니까, 여자의 입장에서는 또 전략상 실패다. 따라서 $r+2$번째 남자(백마탄 왕자)의 프로포즈를 받기 위해서는 $r+1$번째 남자가 $r+2$ 번째보다 나은 남자여서는 안될 것이다. 다시 말해 백마탄 왕자보다 앞서서 프로포즈 하는 남자중 가장 괜찮은 남자가 r번째 이전(r번째 포함)에 여자에게 프로포즈를 하면 된다. $r+1$번째에만 있지 않으면 된다. $1, 2, 3, \cdots, r, r+1$번째 중 $r+1$번째만 아니면 되니까 확률은

$$\frac{r}{r+1}$$

같은 방식으로 백마탄 왕자가 $r+3$번째로 프로포즈를 한다면 $r+1$번째 $r+2$번째에 여자가 프로포즈를 받아들여버리면 안된다. 그러려면 백마탄 왕자 이전의 남자들 중 가장 멋진 남자가 r번째 이전(r번째 포함)에 있으면 된다. 그러면 $r+1$번째, $r+2$번째 남자가 r번째까지의 남자보다 멋질 수 없으므로 여성는 $r+3$번째 남자가 어떤 남자인지 살필 기회를 갖게 된다. 그 확률은

$$\frac{r}{r+2}$$

이런 식으로 동일 한 풀이 과정을 거치면 백마탄 왕자가 백번째로 프로포즈 해올때 여자가 백번까지 기다려서 그 왕자를 선택할 확률은

$$\frac{r}{100}$$

이 결과를 (??)식에 대입하면

$$\sum_{x=r}^{100} \frac{r}{100x} \tag{4}$$

이것이다! 드디어 r에 관한 함수가 나왔다. 항수가 많으니까 그냥 연속적으로 생각해서 적분을 하자.

$$\int_r^{100} \frac{r}{100x} = \frac{r}{100}\Big[\ln x\Big]_r^{100} \tag{5}$$

어차피 우리는 위의 값을 최대로 만드는 r값을 찾는거니까, 그리고 상수항과 계수는 신경 안써도 되니까

$$\frac{d}{dr}(r\ln 100 - r\ln r) = 0 \tag{6}$$

을 만드는 r을 찾자.

(답)

$$r = 37$$

답이 나왔다. 37명이다. 보통 한! 여자에게 프로포즈하는 남자의 숫자가 10명이라고 하면 여자는 최초 3명까지는 튕겨볼 수 있어도 4명부터는 튕겨서는 안된다는 계산이 나온 다. 그냥 괜찮다 싶으면 잡아야 된다는 것이다. 솔직히 10명도 많다. 보통 여성에게 프로포즈 하는 남자가 5명쯤 된다면 최초 한명 쯤은 공주병 환자처럼 튕겨볼 수 있으나 두번째 남자가 프로포즈해올 경우... 첫번째 남자보다 낫기만 하다면 프로포즈를 받아들여야 한다는 것이다. 그만 튕기고...

뭇 남성들이여

만약 사귀자고 했는데도 그녀가 튕긴다면...

그 여자 눈앞에다 연습장 펼쳐놓고 인테그랄 한번 써려주자 !!!!